

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a) Se arată că $S = 0_3$.

b) Se calculează $A^2 = 14 \cdot A$, apoi $B \cdot C = I_3 + (15a + 1) \cdot A$ și se obține $a = -\frac{1}{15}$.

c) Se folosește relația $A^2 = 14 \cdot A$ și se demonstrează prin inducție matematică.

2. a) Deoarece $0 = \varepsilon^3 - 1 = (\varepsilon - 1)(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1)$ și $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, rezultă concluzia.

b) Determinantul sistemului este $\Delta = (\varepsilon - 1)(\varepsilon^2 - 1)(\varepsilon^2 - \varepsilon) \neq 0$, deci sistemul are doar soluția nulă $x = y = z = 0$.

c) Din ipoteză, există $g \in \mathbb{C}[X]$, astfel încât $f_1(X^3) + Xf_2(X^3) + X^2f_3(X^3) = (X^3 - 1) \cdot g(X)$.

Deoarece numerele $1, \varepsilon$ și ε^2 sunt rădăcinile polinomului $X^3 - 1$, se obține sistemul

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 \cdot \varepsilon + a_3 \cdot \varepsilon^2 = 0, \text{ unde } a_k = f_k(1), \forall k \in \{1, 2, 3\} \\ a_1 + a_2 \cdot \varepsilon^2 + a_3 \cdot \varepsilon = 0 \end{cases}$$

Folosind punctul **b)** se deduce că $f_k(1) = 0, \forall k \in \{1, 2, 3\}$, de unde rezultă concluzia.